Метод скачков и аппроксимации Паде[$]

Е. Е. Тыртышников[@]

Предложены простые и полные доказательства основных фактов алгебраической теории Паде на основе «метода скачков», возникшего при изучении ведущих подматриц ганкелевой матрицы.

Алгебраическая теория аппроксимаций Паде является по сути теорией подматриц бесконечной ганкелевой матрицы. Основные факты этой теории формулируются элегантно и просто. С ними можно познакомиться, например, по книге [1]. Однако приведенные там доказательства не только сложны, но и в некоторой степени дезориентируют читателя. Цель этой заметки — дать полное, краткое и ясное изложение теории Паде на основе «метода скачков», возникшего при изучении ведущих подматриц ганкелевой матрицы [2, 6]. В качестве основного результата, помимо некоторого развития самого метода скачков, нужно рассматривать новые доказательства известных утверждений алгебраической теории Паде.

1. Ряды и матрицы

Пусть задан формальный ряд

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

[$]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 05-1-00721, 06-01-08052 и Программы приоритетных фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН.

[@]Институт вычислительной математики РАН

Его *аппроксимацией Паде типа* (m, n) называется пара многочленов

$$u(x) = \sum_{i=0}^{m} u_i x^i, \quad v(x) = \sum_{i=0}^{n} v_i x^i$$

таких, что

$$f(x)v(x) - u(x) = O(x^{m+n+1}) \tag{1}$$

при дополнительном условии

$$v(0) = 1. \tag{2}$$

Отсюда сразу же следует, что

$$f(x) - \frac{u(x)}{v(x)} = O(x^{m+n+1}).$$

Условие (1) равносильно системе линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{n} a_{i-j} v_j = 0, \quad m+1 \leqslant i \leqslant m+n,$$

или, в матричной записи,

$$\begin{bmatrix} a_{m+1} & a_m & \dots & a_{m-n+1} \\ a_{m+2} & a_{m+1} & \dots & a_{m-n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m+n} & a_{m+n-1} & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = 0.$$

С учетом равенства $v_0 = 1$ получаем

$$\begin{bmatrix} a_m & \dots & a_{m-n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m+n-1} & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{m+1} \\ \dots \\ a_{m+n} \end{bmatrix}.$$

Для наглядности возьмем $m = n = 3$, тогда

$$\begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ a_4 & a_3 & a_2 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}.$$

В матрице этой системы каждый элемент определяется разностью строчного и столбцового индексов — такие матрицы называются *теплицевыми*. Переставив в обратном порядке столбцы, получаем матрицу, в которой элементы определяются суммой индексов — такие матрицы называются *ганкелевыми*. Из нашей системы после такой перестановки получается равносильная система

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}.$$

В общем случае это будет система следующего вида:

$$\begin{bmatrix} a_{m-n+1} & \dots & a_m \\ \dots & \dots & \dots \\ a_m & \dots & a_{m+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_n \\ \dots \\ v_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{m+1} \\ \dots \\ a_{m+n} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

или, в краткой записи,

$$A_{mn} v^n = -a^{mn}. \tag{4}$$

Ганкелева матрица A_{mn} составляется из коэффициентов формального ряда $f(x)$. При этом в ее левом нижнем углу помещается коэффициент a_m, а порядок матрицы равен n. Если $i < 0$, то считается, естественно, что $a_i = 0$. Столбец правой части a^{mn} является последним столбцом расширенной прямоугольной ганкелевой матрицы $[A_{mn}, a^{mn}]$.

Таким образом, *вопрос о существовании аппроксимации Паде типа* (m, n) *равносилен вопросу о разрешимости линейной системы* (4). Последнее означает, что

$$a^{mn} \in \operatorname{im} A_{mn},$$

и, в силу теоремы Кронекера–Капелли, равносильно условию

$$\operatorname{rank} A_{mn} = \operatorname{rank}[A_{mn}, a^{mn}]. \tag{5}$$

2. Метод скачков

Рассмотрим полубесконечную ганкелеву матрицу

$$A = [a_{i+j-1}], \quad 1 \leqslant i, j < \infty,$$

и ее ведущие подматрицы. Пусть A_k — ведущая подматрица порядка k, а последовательность натуральных чисел

$$n_1 < n_2 < \ldots$$

определяет порядки тех и только тех ведущих подматриц, которые являются невырожденными. Метод скачков, предложенный в [2], представляет собой схему перехода от некоторого компактного представления матрицы $A_{n_k}^{-1}$ к аналогичному представлению для $A_{n_{k+1}}^{-1}$. Название объясняется тем, что при этом происходит «скачок» через промежуточные вырожденные подматрицы.

С общими вопросами построения быстрых алгоритмов для ганкелевых и теплицевых матриц можно познакомиться, например, по работам [4, 5, 7]. Алгебраические свойства ганкелевых матриц, позволяющие сделать «скачок», можно найти также в книге [6]. Они тесно связаны с изученными в [3] вопросами бесконечного продолжения ганкелевой матрицы с сохранением ранга.

Метод скачков базируется на следующем наблюдении. Пусть $p = n_k$ и $q = n_{k+1}$. В силу невырожденности A_p система

$$\begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_p \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p & \ldots & a_{2p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \ldots \\ s_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{p+1} \\ \ldots \\ a_{2p} \end{bmatrix}$$

имеет единственное решение. Другими словами, усеченные до p элементов столбцы с 1-го по p-й линейно независимы, а таким же образом усеченный $p+1$-й столбец является их линейной комбинацией с коэффициентами $s_1, \ldots, s_p$. Вполне возможно, что те же коэффициенты позволяют получить $p+1$-й столбец как линейную комбинацию предыдущих столбцов при усечении до $p+1$ или даже бóльшего числа элементов.

Теорема 1. *Пусть* $r(p) \geqslant p$ *— минимальный размер усечения, при котором* $p+1$ *-й столбец не является линейной комбинацией предыдущих столбцов. Тогда* $n_{k+1} = r(n_k)$.

Доказательство. Пусть $p = n_k$ и $r = r(p)$. Тогда

$$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_p & a_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p & \dots & a_{2p-1} & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1} & \dots & a_{r+p-2} & a_{r+p-1} \\ a_r & \dots & a_{r+p-1} & a_{r+p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_1 \\ \dots \\ -s_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma \neq 0.$$

Отсюда получаем равенство

$$A_r \left[\begin{array}{cccc|cccc} -s_1 & & & & 1 & & & \\ \dots & -s_1 & & & & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & & & & \dots & \\ -s_p & \dots & \dots & & & & & 1 \\ \hline 1 & -s_p & \dots & & & & & \\ & 1 & \dots & \dots & & & & \\ & & \dots & \dots & & & & \\ & & \dots & -s_p & & & & \\ & & & 1 & & & & \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} & & & & a_1 & a_2 & \dots & a_p \\ & & & & a_2 & a_3 & \dots & a_{p+1} \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & a_p & a_{p+1} & \dots & a_{2p-1} \\ \hline & & & \gamma & a_{p+1} & a_{p+2} & \dots & a_{2p} \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \gamma & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma & \dots & \dots & \dots & a_r & a_{r+1} & \dots & a_{r+p-1} \end{array}\right]. \tag{6}$$

При $p = n_k$ матрица A_p невырожденная. Поэтому ясно, что невырожденность окаймляющей ее матрицы A_r равносильна условию $\gamma \neq 0$. $\square$

Следствие 1. *При* $n_k \leqslant n \leqslant n_{k+1}$ *имеет место равенсто*

$$\dim\ker A_n = \min\{n - n_k, n_{k+1} - n\}.$$

Доказательство. Непосредственно из (6) вытекает, что при умножении A_n на невырожденную матрицу получается матрица, в которой имеется $\min\{n-n_k, n_{k+1}-n\}$ нулевых столбцов, а остальные столбцы линейной независимы. □

Введем обозначение $\hat{A}_n$ для следующего расширения матрицы A_n :

$$\hat{A}_n = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \end{bmatrix}.$$

Следствие 2. *Если* $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, *то равенство рангов*

$$\operatorname{rank} A_n = \operatorname{rank} \hat{A}_n \tag{7}$$

имеет место в том и только том случае, когда

$$n - n_k < n_{k+1} - n. \tag{8}$$

Доказательство. Согласно теореме Кронекера–Капелли, равенство (7) равносильно тому, что последний столбец расширенной матрицы $\hat{A}_n$ является линейной комбинацией ее предыдуших столбцов. Пусть $p = n_k$ и $q = n_{k+1}$.

Запишем $p \leqslant n = p + i < q$. Заметим,что $p+1$ -й столбец матрицы A_{q-1} является линейной комбинацией предыдущих столбцов с коэффициентами $s_1, \dots, s_p$. То же верно в отношении $p+1$ -го столбца ее ведущих подматриц, содержащих A_{p+1} . Если

$$p + 2i < q,$$

то это верно для матрицы A_{p+2i} . Используя ганкелеву структуру матриц, отсюда легко вывести, что $p+1+i$ -й (последний) столбец расширенной матрицы $\hat{A}_{p+i}$ линейно выражается через предыдущие p столбцов (с теми же коэффициентами $s_1, \dots, s_p$). Условие $p + 2i < q$ равносильно неравенству $n - p < q - n$.

Остается доказать, что (7) влечет за собой (8). Согласно (7) последний столбец расширенной матрицы $\widehat{A}_n$ линейно выражается через стобцы A_n. В этом случае при переходе от A_n к A_{n+1} ранг может увеличиться не более чем на 1. От противного, допустим, что

$$n - p \geqslant q - p.$$

Согласно следствию 1,

$$\operatorname{rank} A_n = n - \min\{n-p, q-n\} = 2n - q,$$

$$\operatorname{rank} A_{n+1} = n + 1 - \min\{n+1-p, q-n-1\} = 2n - q + 2.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rank} A_{n+1} = \operatorname{rank} A_n + 2,$$

т. е. ранг должен вырасти больше, чем на 1. $\square$

Следствие 3. *В случае* $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ *неравенство (8) выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank} A_{n+1} - \operatorname{rank} A_n \leqslant 1.$$

3. Детерминантное тождество

Пусть A — матрица порядка n, а A_{ij} — ее подматрица порядка $n-1$, полученная вычеркиванием строки i и столбца j. Пусть $A_{ik;jl}$ обозначает поматрицу порядка $n-2$, полученную из A вычеркиванием пары строк с номерами i и k и пары столбцов с номерами j и l. Следующий результат известен как тождество Сильвестра.

Теорема 2. *Пусть* $i < k$ *и* $j < l$. *Тогда*

$$\det A \, \det A_{ik;jl} = \det A_{ij} \, \det A_{kl} - \det A_{il} \, \det A_{kj}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $i = j = n-1$ и $k = l = n$. Пусть $B = A_{ik;jl}$. Тогда матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} B & v & q \\ u & c & d \\ p & g & h \end{bmatrix}.$$

Предположим сначала, что подматрица B невырожденная. Исключая по Гауссу u и p с помощью невырожденного блока B, находим

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -uB^{-1} & 1 & 0 \\ -pB^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & v & q \\ u & c & d \\ p & g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & v & q \\ 0 & c_1 & d_1 \\ 0 & g_1 & h_1 \end{bmatrix},$$

где

$$h_1 = h - pB^{-1}q, \quad c_1 = c - uB^{-1}v, \quad g_1 = g - pB^{-1}v, \quad d_1 = d - uB^{-1}q.$$

Следовательно,

$$\det A_{ij}\,\det A_{kl} - \det A_{il}\,\det A_{kj} = (\det B)^2(h_1c_1 - g_1d_1) = \det B\,\det A.$$

Если матрица B вырождена, то тождество справедливо при замене B на любую невырожденную матрицу B_ε. Поскольку B_ε можно выбрать сколь угодно близко к B, интересующее нас тождество получается предельным переходом. □

4. Таблица миноров

Приступим к изучению бесконечной ганкелевой матрицы $A = [a_{i+j}]$, составленной из коэффициентов формального ряда $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ (если $i < 0$, то $a_i = 0$). Напомним, что через A_{mn} обозначается ее ганкелева подматрица порядка n, содержащая в левом нижнем углу коэффициент a_m. Нас интересует полубесконечная матрица $C = [c_{mn}]$, составленная из миноров матрицы A:

$$c_{mn} = \det A_{mn}, \quad 0 \leqslant m, n < \infty.$$

Условимся считать, что $c_{m0} = 1$.

Лемма 1.

$$c_{m,n+1}c_{m,n-1} = c_{m+1,n}c_{m-1,n} - c_{mn}^2.$$

Доказательство. Данное равенство есть не что иное, как детерминантное тождество Сильвестра (теорема 2), записанное для ганкелевой матрицы $A_{m,n+1}$ и ее подматриц, получаемых при вычеркивании первых и последних строк и столбцов и поэтому остающихся ганкелевыми. □

Таблицу миноров C для ганкелевой матрицы A иногда называют C-*таблицей* [1]. Ее основное свойство заключается в особой структуре расположения нулей (нулевых миноров матрицы A). Будем называть *окном* любую конечную или бесконечную подматрицу, составленную из подряд идущих строк и столбцов. Окно называется *квадратным окном*, если оно соответствует конечной квадратной подматрице или бесконечной подматрице, в которой бесконечно много как строк, так и столбцов. Все примыкающие к окну элементы будем называть его *рамой* — это элементы более широкого окна на строках и столбцах, окаймляющих данное окно. Нас будут интересовать *нулевые окна* и *ненулевые рамы* — в первом случае все элементы множества суть нули, во втором все они отличны от нуля.

В дальнейшем будем считать, что $a_0 \neq 0$. Тогда $c_{0n} \neq 0$ при $n \geqslant 1$ (определители ганкелевых треугольных матриц с ненулевым элементом побочной диагонали). Кроме того, примем соглашение о том, что $c_{m0} = 1$ при $m \geqslant 0$.

Теорема 3. *Любой нулевой элемент таблицы миноров C принадлежит квадратному нулевому окну с ненулевой рамой.*

Доказательство. Предположим, что $c_{m,n-1} = c_{m+1,n} = 0$ или $c_{m,n+1} = c_{m+1,n} = 0$. Согласно лемме 1 находим $c_{mn} = 0$. Таким образом, матрицы вида

$$\begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

непременно оказываются нулевыми. С учетом неравенств $c_{m0} \neq 0$ и $c_{0n} \neq 0$ отсюда следует, что любой нулевой элемент матрицы C принадлежит прямоугольному нулевому окну с ненулевой рамой. Остается доказать, что любое такое окно является квадратным.

Пусть $c_{mn} \neq 0$ — элемент рамы, расположенный в ее левом верхнем углу. Предположим, что $c_{m+r,n+r} \neq 0$ — еще один элемент рамы того же окна, и докажем, что этот элемент находится в правом нижнем углу. Если это не так, то:

(1) $c_{m+r,n+r-1} = 0$, либо

(2) $c_{m+r-1,n+r} = 0$.

Случай (1). Заметим, что матрицы A_{mn} и $A_{m+r,n+r}$ являются невырожденными ведущими подматрицами в ганкелевой матрице $A_{m+r,n+r}$ и при этом промежуточные ведущие подматрицы $A_{m+i,n+i}$ при $0 < i < r$ являются вырожденными. Согласно методу скачков (теорема 1), $n+1$-й столбец матрицы матрицы $A_{m+r,n+r}$ с вычеркнутой последней строкой является линейной комбинацией предыдущих столбцов.

В данном случае $c_{m+1,n} \neq 0$ и $c_{m+r+1,n+r} \neq 0$. Поэтому метод скачков можно применить к невырожденным ганкелевым матрицам $A_{m+1,n}$ и $A_{m+1+r,n+r}$ и сделать вывод о том, что $n+2$-й столбец матрицы $A_{m+r,n+r}$ с вычеркнутой последней строкой является линейной комбинацией предыдущих столбцов, начиная со 2-го. Вычитая данные линейные комбинации из $n+1$-го и $n+2$-го столбцов, мы не изменим определитель матрицы $A_{m+r,n+r}$ и получим в нем два столбца с нулевыми элементами, кроме элементов последней строки. Следовательно, $c_{m+r,n+r} = \det A_{m+r,n+r} = 0$, что противоречит сделанному ранее предположению. Поэтому с необходимостью $c_{m+r,n+r-1} \neq 0$.

Случай (2). Заметим, что $c_{m+r,n+r+1} \neq 0$ (иначе в силу леммы 1 $c_{m+r,n+r} = 0$). Таким образом, матрицы $A_{m,n+1}$ и $A_{m+r,n+r+1}$ — невырожденными ведущие подматрицы с вырожденными промежуточными подматрицами. Согласно методу скачков, $n+2$-й столбец в $A_{m+r,n+r+1}$ с вычеркнутой последней строкой является линейной комбинацией предыдущих столбцов. Отсюда находим, что $n+2$-й столбец матрицы $A_{m+r,n+r}$ с вычеркнутой последней строкой является линейной комбинацией предыдущих столбцов. Как и раньше, то же верно в отношении $n+1$-го столбца той же матрицы. Опять приходим к противоречию с невырожденностью матрицы $A_{m+r,n+r}$.

Следовательно, $c_{m+r-1,n+r} \neq 0$.

Таким образом, в каждом из случаев (1) и (2) мы получаем противоречие. Значит, одновременно имеем

$$c_{m+r,n+r} \neq 0, \quad c_{m+r,n+r-1} \neq 0, \quad c_{m+r-1,n+r} \neq 0.$$

Это означает, что элемент $c_{m+r,n+r}$ находится в правом нижнем углу рамы нулевого окна. Поскольку в левом верхнем углу размещается элемент c_{mn}, то окно является квадратным. Если оказалось, что $c_{m+r,n+r} \neq 0$ при всех $r > 0$, то из леммы 1 сразу же вытекает, что данное нулевое окно является бесконечным квадратным окном. □

5. Теория Паде

Теория Паде дает необходимое и достаточное условие существования аппроксимации Паде типа (m, n) в терминах структуры нулей в таблице миноров, ассоциированной с формальным рядом $f(x)$. Как мы уже знаем, необходима и достаточна совместность системы (4). Очевидно, условие $c_{mn} = \det A_{mn} \neq 0$ является достаточным для разрешимости этой системы. Основной результат для случая $c_{mn} = 0$ формулируется следующим образом.

Теорема 4. *Пусть* $c_{mn} = 0$ *принадлежит нулевому окну матрицы* C *с ненулевой рамой, имеющей в левом верхнем углу элемент* $c_{kl} \neq 0$, *а в правом верхнем углу элемент* $c_{k+r,l+r}$. *Тогда аппроксимация Паде типа* (m, n) *существует в том и только том случае, когда* $k+l < m+n < k+l+r$.

Доказательство. Пусть c_{st} и $c_{s+p,t+p}$ принадлежат ненулевой раме данного нулевого окна и при каком-то $h > 0$ получается $m = s+h$ и $n = t+h$. Матрица A_{st} является невырожденной ведущей подматрицей в невырожденной ганкелевой матрице $A_{s+p,t+p}$, причем подматрицы $A_{s+i,t+i}$ вырождены при всех $0 < i < p$. Из метода скачков вытекает (следствие 2), что условие совместности (5) равносильно неравенству

$$(t+h) - t < (t+p) - (t+h) \quad \Leftrightarrow \quad h < p/2.$$

Оно выполняется в том и только случае, когда

$$m+n<k+l+r. \qquad \square$$

Теорема 5. *Пусть* c_{kl} *и* $c_{k+r,l+r}$ *— угловые элементы ненулевой рамы нулевого окна таблицы миноров, и предположим, что* $k \leqslant m$, $l \leqslant n$. *Тогда аппроксимация Паде типа* (k,l) *является также аппроксимацией типа* (m,n), *если* $k+l \leqslant m+n < k+l+r$.

Если c_{kl} *является угловым элементом ненулевой рамы бесконечного нулевого окна, то в случае* $k \leqslant m$, $l \leqslant n$ *аппроксимация Паде типа* (k,l) *будет также аппроксимацией Паде типа* (m,n), *если* $k+l \leqslant m+n$.

Доказательство. Пусть $k \leqslant m$ и $l \leqslant n$. Достаточно заметить, что если v^l есть решение системы

$$A_{kl}v^l = -a^{kl},$$

то при условии $k+l \leqslant m+n < k+l+r$ выполняется также равенство

$$A_{mn}\begin{bmatrix}0\\ v^l\end{bmatrix} = -a^{mn}.$$

В случае бесконечного окна это верно при всех $r>0$. $\square$

Список литературы

[1] Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*, Мир, 1986.

[2] В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, *Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами*, Наука, 1987, 320 с.

[3] И. С. Иохвидов, *Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы*, Наука, 1974, 264 с.

[4] Е. Е. Тыртышников, *Теплицевы матрицы, некоторые их аналоги и приложения*, ОВМ РАН, 1989.

[5] Е. Е. Тыртышников, *Методы численного анализа*, Издательский центр «Академия», 2007.

[6] G. Heinig, K. Rost, *Algebraic Methods for Toeplitz-like Matrices and Operators*, Academie-Verlag, Berlin, 1984.

[7] E. E. Tyrtyshnikov, Euclidean Algorithm and Hankel Matrices // *Numerical Analysis and Applied Mathematics*, AIP Conference Proceedings. 2007. V. 936, Melville, New York. P. 27–30.