

# Об использовании мозаично-скелетных аппроксимаций при решении гиперсингулярных интегральных уравнений<sup>§</sup>

Д. В. Савостьянов<sup>®</sup>, С. Л. Ставцев<sup>®</sup>, Е. Е. Тыртышников<sup>®</sup>

## 1. Введение

При решении задач дифракции звуковых волн на поверхности сложной формы волновыми методами возникает проблема нахождения решения с увеличением частоты излучения. В статье для получения решения краевой задачи Неймана для скалярного уравнения Гельмгольца с помощью теории потенциала задача сводится к решению интегральных уравнений. Для получения численного решения интегрального уравнения требуется заполнять матрицы большого объема и решать соответствующие СЛАУ. В статье показаны результаты применения мозаично-скелетного метода к аппроксимации таких матриц. В том числе показана эффективность предлагаемых методов, даны численные оценки роста мозаичного ранга с увеличением частоты излучения.

Применение мозаично-скелетных методов позволило провести более детальный анализ решения интегральных уравнений. Например, получить решение, когда источник расположен близко к поверхности дифрагируемого тела.

Задача с источником, расположенным близко к поверхности, возникает при моделировании распространения звука от вентиляцион-

---

<sup>§</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ №05-01-00721а) и программы фундаментальных исследований отделения математических наук РАН «Вычислительные и информационные проблемы решения больших задач» по проекту «Матричные методы и технологии для задач со сверхбольшим числом неизвестных»

<sup>®</sup>Институт вычислительной математики РАН

ного оборудования, которые обычно располагается на крыше зданий. Поэтому в статье более подробно показано решение задачи с источником, расположенным близко к поверхности. В том числе для возможности повторения сделанных преобразований показано более детальное вычисление гиперсингулярного интеграла с весовой функцией. Для применения получаемых формул также использовались мозаично-скелетонные аппроксимации.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим решение внешней краевой задачи Неймана на поверхности  $\sigma$

$$\frac{\partial \varphi(M)}{\partial n_M} = -\frac{\partial \varphi_0(M)}{\partial n_M}, \quad M \in \sigma \quad (1)$$

для скалярного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \varphi(M) + \kappa^2 \varphi(M) = 0, \quad M \in D, \quad (2)$$

где  $\kappa = \frac{2\pi\nu}{c}$  — волновое число,  $\nu$  — частота источника. В (1)  $\vec{n}_M$  — единичный вектор нормали к поверхности  $\sigma$ , направленный в область  $D$ . Область  $D$  является неограниченной.

Поверхность  $\sigma$  задается уравнением

$$\psi = \psi(u, v), \quad (u, v) \in \mathfrak{R}^2, \quad \psi \in C^1. \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда потенциал  $\varphi_0(M)$  представим в виде:

$$\varphi_0(M) = \sum_{i=1}^m \frac{Q_i \exp(i\kappa r_{MM_i})}{4\pi r_{MM_i}}, \quad M_i \in D, \quad i = 1, \dots, m \quad (4)$$

Таким образом, по формуле (4) рассчитывается потенциал от системы точечных источников мощностью  $Q_i$  расположенных в точках  $M_i$  области  $D$ .

Так как область  $D$  неограниченна, то зададим условия излучения на бесконечности — условия Зоммерфельда:

$$\left( \frac{\vec{r}_M}{r_M}, \nabla \varphi(M) \right) - i\kappa \varphi(M) = O\left( \frac{1}{R_{MM_0}} \right), \quad (5)$$

где  $R_{MM_0}$  — расстояние от точки  $M$  до  $M_0 \in \sigma$ ,  
 $r_M = |\vec{r}_M| = |x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z_M \vec{k}| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}$ ,  
 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орты координатных осей.

### 3. Численный метод решения

Также как в работе [6] решение задачи (1) — (5) будем искать в виде потенциала двойного слоя, распределенного по поверхности  $\sigma$

$$\varphi(M) = \int_{\sigma} g(N) G(M, N) d\sigma_N, \quad M \in D, \quad M \notin \sigma, \quad (6)$$

где  $g(N)$ ,  $N \in \sigma$  — плотность потенциала двойного слоя. Ядро интегрального оператора (6) имеет вид:

$$G(M, N) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_N} \frac{\exp(ikr_{MN})}{r_{MN}}. \quad (7)$$

Потенциал двойного слоя (6) является решением задачи (1) — (5), если его плотность  $g(M)$   $M \in \sigma$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_{\sigma} g(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_M} d\sigma_N = -\frac{\partial \varphi_0(M)}{\partial n_M}, \quad M \in \sigma. \quad (8)$$

В работе [7] показано, что если поверхность  $\sigma$  является плоскостью  $z = 0$ , то решением интегрального уравнения (6) является функция

$$g(N) = 2\varphi_0(N), \quad N \in \sigma. \quad (9)$$

Из формул (4) и (9) видно, что решение интегрального уравнения (6) является осциллирующей функцией. Частота осцилляций определяется волновым числом  $k$ . При решении трехмерных задач практики, например, дифракции звуковых волн (см. [6], [7]), дифракции Н-поляризованных электромагнитных волн (см. [3]) возникает необходимость решать интегральные уравнения для  $k \sim 0,1 \dots 10$ .

Если поверхность  $\sigma$  не является плоскостью, то для решения уравнения (6) будем использовать численный метод дискретных особенностей, описанный в работах [5], [4]. Согласно этому методу поверхность  $\sigma$  равномерно разбивается по параметрам  $u, v$ . Для каждой ячейки  $\sigma_{ij}$ ,  $i, j = 1 \dots n$  функция  $g(N)$  считается постоянной. Затем интегральное уравнение (6) записывается в расчетных точках (точках коллокации). В результате задача сводится к решению системы линейных интегральных уравнений (СЛАУ)

$$Ag = b. \quad (10)$$

Согласно методу дискретных особенностей элементы матрицы  $A$  вычисляются по формуле:

$$a_{ij}(M) = - \int_{L_{\sigma_{ij}}} \vec{n}_M \cdot (\vec{dl} \times \nabla_N F(M, N)) + \\ + k^2 \int_{\sigma_{ij}} F(M, N) \vec{n}_M \cdot \vec{n}_N d\sigma, \quad i, j = 1 \dots n, \quad (11)$$

где  $L_{\sigma_{ij}}$  — граница ячейки  $\sigma_{ij}$ ,

$$F(M, N) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ikr_{MN})}{r_{MN}}. \quad (12)$$

Очевидно, что точность решения интегрального уравнения определяется шагами разбиения. С другой стороны искомая функция  $g(N)$  является осциллирующей и для ее расчета при больших  $k$  требуется меньший шаг разбиения. Но с уменьшением шагов разбиения увеличивается размер решаемой системы (10). Таким образом, при больших  $k$  возникает необходимость решать СЛАУ (10) больших размерностей.

Матрица  $A$  является плотной и при  $n > 2 \cdot 10^4$  ее невозможно сохранить в оперативной памяти. Будем использовать метод *неполной крестовой аппроксимации* для того, чтобы приблизить исходную матрицу  $A$  матрицей малого ранга (см. [8], [9]).

Согласно этому методу исходная матрица разбивается на блоки и для заданной точности аппроксимации  $\epsilon$  каждый блок заменяется

Таблица 1.

$h$	$n$	$T_{ms}$	$I_{re}$	$I_{im}$	$T_{st}$
10/4	512	26сек.	100	85,7	36сек.
10/8	2048	2мин. 26сек.	44	26,2	10мин. 16сек.
10/16	8192	13мин. 25сек.	14,4	7,34	2час. 38мин. 56сек.
10/32	32768	1ч. 10 мин. 27сек.	4,63	2,19	1д. 17час. 31мин. 44сек.

матрицей ранга  $k$ . В результате для хранения блока  $l_1 \times l_2$  требуется не  $l_1 \cdot l_2$ , а  $k(l_1 + l_2)$  чисел. Отметим, что при использовании метода неполной крестовой аппроксимации для каждого блока необходимо вычислить только  $O(k(l_1 + l_2))$  вместо  $l_1 \cdot l_2$  элементов матрицы. Так как при вычислении элементов матрицы по формулам (11) интегралы берутся численно, то уменьшение количества вычисляемых элементов значительно ускоряет расчет аппроксимирующей матрицы.

#### 4. Результаты расчетов через мозаично-скелетные аппроксимации

Исследуем эффективность этого метода с помощью численных экспериментов.

Исследование проведем для решения интегрального уравнения (6), когда поверхность  $\sigma$  является прямоугольным параллелепипедом  $20 \times 30 \times 40$ . При расчете  $\varphi_0(M)$  по формуле (4) положим  $m = 1$ ;  $Q_1 = 1$ ;  $M_1(20; 0; 0)$  (см. рисунок 1).

Сравним временные затраты по заполнению матриц различной размерности прямым методом и методом, основанном на мозаично-скелетных аппроксимациях. Результаты сравнения представлены в таблице 1.

где  $h$  — шаг сетки;  $n$  — размер матрицы;  $T_{ms}$  — время расчета матрицы с помощью мозаично-скелетного метода;  $I_{re}$  — коэффи-

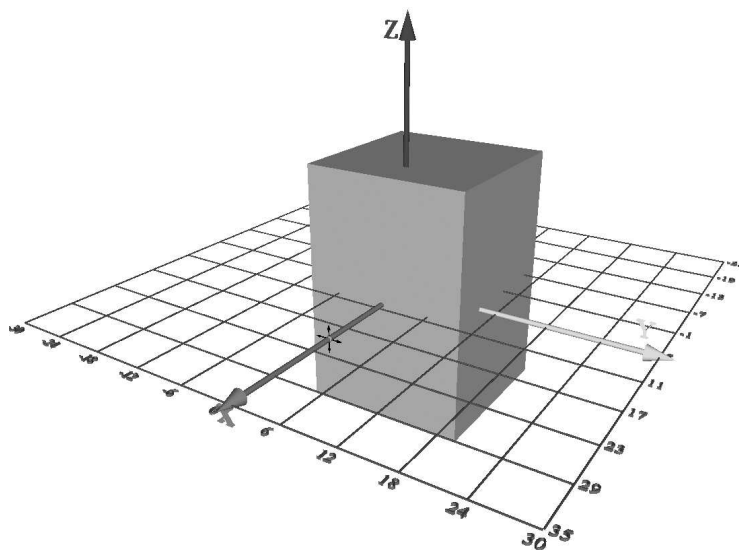


Рис. 1. Пример геометрии

коэффициент сжатия действительной части матрицы;  $I_{im}$  – коэффициент сжатия мнимой части матрицы;  $T_{ms}$  – время расчета матрицы с помощью прямого метода. В расчетах волновое число  $k$  полагалось равным 0,2.

Пусть  $mem(\mathcal{A})$  – объем памяти, необходимый для хранения всех блоков саппроксимированной матрицы,  $mem(A)$  – объем памяти, необходимый для хранения несаппроксимированной матрицы, тогда коэффициент сжатия

$$I = \frac{mem(\mathcal{A})}{mem(A)} \cdot 100 \quad (13)$$

определяет эффективность метода по используемой для хранения памяти.

На коэффициент сжатия  $I$  влияют параметры решаемой задачи, в том числе волновое число  $k$ . Исследуем зависимость мозаичного

ранга  $R = \frac{2n1}{100}$  (см. [8]) от волнового числа  $k$  для задачи, проиллюстрированной на рисунке 1,  $n = 8192$ . Результаты расчетов представлены в таблице 2.

В работе [2] были даны оценки зависимости мозаичного ранга  $R$  матрицы, порожденного интегральным оператором с ядром  $\exp ikt/\gamma$  от волнового числа, а именно

$$R < \text{const} (ka - \log_2 \varepsilon)^\alpha \log_2 n, \quad \alpha = 2, \tag{14}$$

где  $a$  — диаметр множества, на котором строились аппроксимации (в нашей задаче — это максимальный размер параллелепипеда),  $\varepsilon$  — точность аппроксимации матрицы ( $\varepsilon = 10^{-4}$ ).

Полагая, что для ядра (7) зависимость  $R(k)$  аналогична (14), рассчитаем  $\alpha$ . Используя формулу

$$\alpha = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - (\langle x \rangle)^2},$$

где  $x = \lg(ka - \log_2 \varepsilon)$ ,  $y = \lg(R)$ , символ  $\langle \cdot \rangle$  означает среднее значение, получаем  $\alpha_{Re} \approx 0,69$ ,  $\alpha_{Im} \approx 1,32$ . Таким образом, в оценке (14) значение  $\alpha$  завышено, то есть численный эксперимент дает лучший результат, чем теоретические оценки.

С увеличением частоты, а значит и волнового числа  $k$  увеличивается число осцилляций в рассчитываемой плотности  $g$ . Для сохранения точности вычислений будем с увеличением  $k$  пропорционально увеличивать число точек разбиения на единицу длины (размер матрицы увеличивается пропорционально квадрату). Будем

Таблица 2.

$k$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$R_{Re}$	880	940	1000	1080	1170	1250	1350
$R_{Im}$	368	501	651	785	908	1040	1160
$k$	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
$R_{Re}$	1450	1540	1650	1740	1830	1940	
$R_{Im}$	1280	1410	1510	1620	1730	1820	

считать, что на длину волны  $\lambda$  приходится  $2\pi$  контрольных точек. Результаты представлены в таблице 3.

В таблице 3  $T$  — это время расчета матрицы.

Из таблицы видно, что с ростом волнового числа  $k$  (т.е. с увеличением частоты) индекс сжатия как для действительной так и для мнимой частей матрицы уменьшается, что приводит к уменьшению степени роста времени расчета матрицы с увеличением частоты.

Мозаично-скелетонные аппроксимации позволяют более подробно исследовать задачи дифракции волн когда источник расположен близко к поверхности.

В задаче, изображенной на рисунке 1, будем приближать источник к поверхности и рассмотрим как будет изменяться решение (8). Пусть  $d$  — кратчайшее расстояние от источника до поверхности. На рисунке 2 изображены изменения вдоль оси  $OZ$  действительной (a) и мнимой (b) частей решения в точках пересечения плоскости  $OXZ$  с частью поверхности  $\sigma - x = 10$  при  $d = 5\text{м}$ ,  $d = 1\text{м}$  и  $d = 0,5\text{м}$ .

Видим, что с уменьшением  $d$  усиливается острота пика функции  $g$  в точке (точках)  $N^* \in \sigma$  близких к источнику. Поэтому при получении решения  $g(N)$  интегрального уравнения (8) требуется либо мелкая сетка, либо неравномерная сетка, сгущающаяся вблизи точек  $N^*$ . Это проиллюстрировано на рис. 2.

Однако, если решать систему относительно функции

$$h(N) = g(N) - p_Q(N), \quad N \in \sigma, \quad (15)$$

Таблица 3.

$k$	0,4	0,6	0,8	1,2	1,6	2,4
$h$	10/4	10/6	10/8	10/12	10/16	10/24
$n$	512	1152	2048	4608	8192	18432
$I_{Re}$	100	100	75,9	49,8	37,0	24,3
$I_{Im}$	100	94,9	72,7	47,9	35,4	23,3
$T$	41с.	3мин. 13с.	7мин. 14с.	24 мин. 21с.	1ч. 10мин. 52с.	3ч. 43мин. 45с.



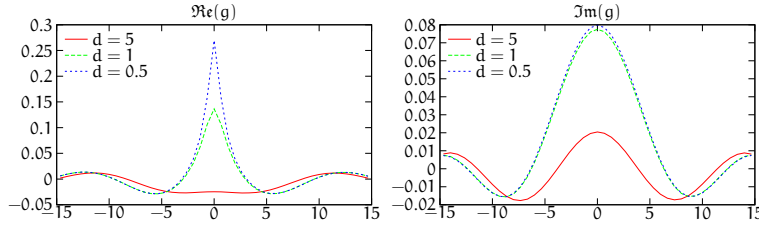


Рис. 2. Изменение функции  $g$  при приближении источника к поверхности

которая не содержит острых пиков, то решение можно искать на равномерной и достаточно грубой сетке.

В результате из формул (15) и (8) получаем следующее интегральное уравнение:

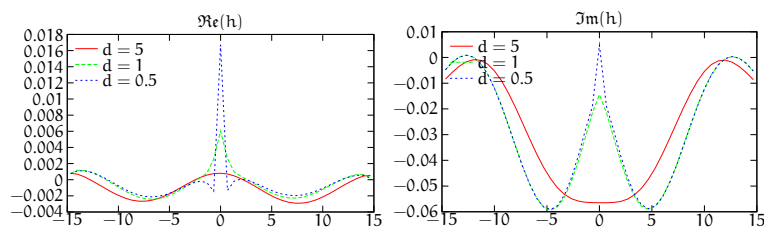
$$\int_{\sigma} h(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_M} d\sigma_N = -\frac{\partial \varphi_0(M)}{\partial n_M} - \int_{\sigma} p_Q(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_M} d\sigma_N, \quad M \in \sigma. \quad (16)$$

Как выбрать функцию  $p_Q(N)$ ? Напомним, что формула (9) является решением интегрального уравнения (8), когда поверхность  $\sigma$  — плоскость  $z = 0$ . Поэтому в качестве функции  $p_Q(N)$  можно выбрать

$$p_Q(N) = 2\varphi_0(N), \quad N \in \sigma. \quad (17)$$

Обратим внимание на то, что острый пик существует только для действительной части решения  $g(N)$ . Если в функции  $\varphi_0(N)$ , вычисляемой по формуле (4), разложим  $\exp(ikr_{NM_i})$ ,  $i = 1, \dots, m$  в степенной ряд, то очевидно, что существование пика определяется первыми членами ряда, то есть

$$\varphi_R(N) = \sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{4\pi r_{NM_i}}, \quad (18)$$

Рис. 3. Графики функции  $h(N)$  в точках передней грани куба

поэтому в качестве  $p_Q(M)$  можно взять величину

$$p_Q(N) = 2\varphi_R(N), \quad N \in \sigma. \quad (19)$$

На рисунке 3 приведены графики функции  $h(N)$  в точках передней грани куба: на рисунке (а), если  $p_Q(N)$  рассчитывается по формуле (17), на рисунке (b) — при расчете  $p_Q(N)$  по (19).

На рисунке 3 приведены результаты расчета с использованием функции  $g(N)$ , которая рассчитывалась численно, в ходе интегрального уравнения. Из-за существования пика погрешность вычислений функции  $g(N)$ , а значит и  $h(N)$ , вблизи оси  $OZ$  получилась большой.

## 5. Вычисление гиперсингулярного интеграла с весом

В правой части интегрального уравнения (16) стоит гиперсингулярный интеграл

$$I(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} p_Q(N) \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{\partial F(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N, \quad (20)$$

где  $F(M, N)$ , рассчитываемое по формуле (12), является фундаментальным решением уравнения Гельмгольца (2).

Представим интеграл (20) в виде

$$I(M) = \vec{n}_M \cdot \vec{\Phi}(M), \quad (21)$$

где  $\vec{\Phi}(M) = \Phi_x(M)\vec{i} + \Phi_y(M)\vec{j} + \Phi_z(M)\vec{k}$ ,  $\vec{n}_M = \cos \alpha_M \vec{i} + \cos \beta_M \vec{j} + \cos \gamma_M \vec{k}$ . Здесь  $\cos \alpha_M$ ,  $\cos \beta_M$ ,  $\cos \gamma_M$  — направляющие косинусы вектора  $\vec{n}_M$ , а также введены обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_x(M) &= \int_{\sigma} p_Q(N) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial x_M \partial n_N} d\sigma_N; \\ \Phi_y(M) &= \int_{\sigma} p_Q(N) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial y_M \partial n_N} d\sigma_N; \\ \Phi_z(M) &= \int_{\sigma} p_Q(N) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial z_M \partial n_N} d\sigma_N. \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть  $\vec{n}_N = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ , где  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  — направляющие косинусы вектора  $\vec{n}_N$ . Из определения функции  $F(M, N)$  имеем  $\nabla_M F(M, N) = -\nabla_N F(M, N)$   $\Phi_x(M) = -\int_{\sigma} p_Q(N) \times \cos \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_N^2} d\sigma_N - \int_{\sigma} p_Q(N) \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial x_N \partial y_N} d\sigma_N - \int_{\sigma} p_Q(N) \cos \gamma \frac{\partial^2}{\partial x_N \partial z_N} d\sigma_N$ . Представим  $\Phi_x(M)$  в следующем виде

$$\Phi_x(M) = -I_1(M) - I_2(M) - I_3(M), \quad (23)$$

где через  $I_1(M)$ ,  $I_2(M)$ ,  $I_3(M)$  обозначим следующие интегралы

$$\begin{aligned} I_1(M) &= \int_{\sigma} p_Q(N) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial x_N^2} \cos \alpha d\sigma_N; \\ I_2(M) &= \int_{\sigma} p_Q(N) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial x_N \partial y_N} \cos \beta d\sigma_N; \\ I_3(M) &= \int_{\sigma} p_Q(N) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial x_N \partial z_N} \cos \gamma d\sigma_N. \end{aligned} \quad (24)$$

Так как  $F(M, N)$  — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (2), то при  $N \neq M$  справедливо следующее соотношение

$$\frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial x_N^2} = -\frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial y_N^2} - \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial z_N^2} - \kappa^2 F(M, N)$$

или после умножения правой и левой частей на  $p_Q(N)$ , приходим к

$$p_Q(N) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial x_N^2} = -p_Q(N) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial y_N^2} - p_Q(N) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial z_N^2} - \kappa^2 p_Q(N) F(M, N). \quad (25)$$

Так как для дважды дифференцируемых функций  $A(x, y)$  и  $B(x, y)$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} A(x, y) \frac{\partial B(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( A(x, y) \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} \right) - \frac{\partial A(x, y)}{\partial x} \frac{\partial B(x, y)}{\partial x}; \\ A(x, y) \frac{\partial B(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( A(x, y) \frac{\partial B(x, y)}{\partial y} \right) - \frac{\partial A(x, y)}{\partial x} \frac{\partial B(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (26)$$

Применяя первое равенство (26) для  $A(x, y) = p_Q(N)$  и  $B(x, y) = F(M, N)$ , и заменяя  $\frac{\partial}{\partial y_N}$ , приходим к

$$p_Q(N) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial y_N^2} = \frac{\partial}{\partial y_N} \left( p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \right) - \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N}, \quad (27)$$

а если заменить  $\frac{\partial}{\partial x}$  на  $\frac{\partial}{\partial z_N}$ , то

$$p_Q(N) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial z_N^2} = \frac{\partial}{\partial z_N} \left( p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \right) - \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N}. \quad (28)$$

Подставим (27) и (28) в (25) и тогда для интеграла  $I_1(M)$  из (24) будет справедливо следующее соотношение

$$\begin{aligned} I_1(M) &= \int_{\sigma} \left[ \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} + \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} - \right. \\ &\quad \left. - \kappa^2 p_Q(N) F(M, N) \right] \cos \alpha d\sigma - \int \left[ \frac{\partial}{\partial y_N} \left( -p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z_N} \left( p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \right) \right] \cos \alpha d\sigma. \end{aligned}$$

Применим вторую формулу из (26) к  $p_Q \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial x_N \partial y_N}$ , полагая  $A(x, y) = p_Q(N)$  и  $B(x, y) = F(M, N)$ , и заменяя  $\frac{\partial}{\partial x}$  на  $\frac{\partial}{\partial x_N}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  на  $\frac{\partial}{\partial y_N}$  приходим к

$$p_Q(N) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial x_N \partial y_N} = \frac{\partial}{\partial x_N} \left( p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \right) - \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N}. \quad (29)$$

Рассуждая аналогичным образом и заменяя во второй формуле (26)  $\frac{\partial}{\partial x}$  на  $\frac{\partial}{\partial x_N}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  на  $\frac{\partial}{\partial z_N}$  приходим к

$$p_Q(N) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial x_N \partial z_N} = \frac{\partial}{\partial x_N} \left( p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \right) - \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N}. \quad (30)$$

Таким образом, используя формулы (29) и (30) перепишем интегралы  $I_2(M)$  и  $I_3(M)$ :

$$I_2(M) = - \int_{\sigma} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \cos \beta d\sigma_N + \int_{\sigma} \cos \beta \left[ - \frac{\partial}{\partial x_N} \left( - p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \right) \right] d\sigma_N,$$

$$I_3(M) = - \int_{\sigma} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \cos \gamma d\sigma_N + \int_{\sigma} \cos \gamma \left[ - \frac{\partial}{\partial x_N} \left( - p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \right) \right] d\sigma_N.$$

Применяя полученные выражения для  $I_1(M)$ ,  $I_2(M)$  и  $I_3(M)$ , а

также (23) запишем  $\Phi_x(M)$  в виде

$$\begin{aligned} \Phi_x(M) = & - \int_{\sigma} \left\{ \cos \alpha \left[ \frac{\partial}{\partial y_N} \left( -p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial z_N} \left( p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \right) \right] + \left[ - \frac{\partial}{\partial x_N} \left( -p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \right) \right] \times \right. \\ & \times \cos \beta + \cos \gamma \left[ \frac{\partial}{\partial x_N} \left( p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \right) \right] \left. \right\} d\sigma - \int_{\sigma} \left\{ \left[ \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \times \right. \right. \\ & \times \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} + \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} - \kappa^2 p_Q(N) F(M, N) \left. \right] \cos \alpha - \\ & \left. - \cos \beta \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} - \cos \gamma \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \right\} d\sigma. \end{aligned} \quad (31)$$

Для дальнейших рассуждений воспользуемся формулой Стокса [1]:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma = \int_{L_{\sigma}} P dx + Q dy + R dz, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $L_{\sigma}$  — граница поверхности  $\sigma$ . Полагая в формуле (32)  $P = 0$ ,  $Q = p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N}$  и  $R = -p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N}$  получаем следующее соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \left\{ \cos \alpha \left[ \frac{\partial}{\partial y_N} \left( -p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \right) - \frac{\partial}{\partial z_N} \left( p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \right) \right] + \right. \\ \left. + \cos \beta \left[ - \frac{\partial}{\partial x_N} \left( -p_Q(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \right) \right] + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial x_N} \left[ p_Q(N) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \right] \right\} d\sigma = \int_{L_{\sigma}} p_Q(N) \left( \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} dy_N - \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} dz_N \right). \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение в выражение (31), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_x(M) = & - \int_{L_\sigma} p_Q(N) \left( \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} dy_N - \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} dz_N \right) - \\ & - \int_{\sigma} \left\{ \left[ \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} + \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} - \right. \right. \\ & - \kappa^2 p_Q(N) F(M, N) \left. \right] \cos \alpha - \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \cos \beta - \\ & \left. - \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \cos \gamma \right\} d\sigma. \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим вычисление  $\Phi_x(M)$  по замкнутой поверхности. Разобьем поверхность  $\sigma$  на  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , то есть  $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ . При интегрировании по  $\sigma_1$   $\Phi_x(M)$  содержит  $\int_{L_{\sigma_1}} f_1(N) dl_{N1}$ , а при интегрировании по  $\sigma_2$  —  $\int_{L_{\sigma_2}} f_2(N) dl_{N2}$ . В силу наших построений  $L_{\sigma_1} = L_{\sigma_2}$ ,

$f_1(N) = f_2(N)$ ,  $dl_{N1} = -dl_{N2}$ . Поэтому для замкнутой поверхности  $\sigma$  в (33)  $\int_{L_\sigma} p_Q(N) \left( \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} dy_N - \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} dz_N \right) = 0$ .

Из (33) по формулам (26) имеем

$$\frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} = \frac{\partial}{\partial y_N} \left( F(M, N) \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \right) - F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial y_N^2}; \quad (34)$$

$$\frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} = \frac{\partial}{\partial z_N} \left( F(M, N) \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} \right) - F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial z_N^2}.$$

К подинтегральной функции в (33) добавим и вычтем

$$\begin{aligned} \cos \beta \frac{\partial}{\partial x_N} \left( F(M, N) \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \right) = & F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial x_N \partial y_N} \times \\ & \times \cos \beta + \cos \beta \frac{\partial F(M, N)}{\partial x_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N}; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\cos \gamma \frac{\partial}{\partial x_N} \left( F(M, N) \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} \right) = F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial x_N \partial z_N} \times \\ \times \cos \gamma + \cos \gamma \frac{\partial F(M, N)}{\partial x_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N},$$

то получим

$$\Phi_x(M) = \kappa^2 \int p_Q(N) F(M, N) \cos \alpha d\sigma - \int \left\{ \left[ - \left( \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial y_N^2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial z_N^2} \right) F(M, N) \right] \cos \alpha + \cos \beta \left[ F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial x_N \partial y_N} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial F(M, N)}{\partial x_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \right] + \cos \gamma \left[ F(M, N) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial x_N \partial z_N} + \frac{\partial F(M, N)}{\partial x_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \right] \right\} d\sigma - \\ - \int \left\{ \cos \alpha \left[ \frac{\partial}{\partial y_N} \left( F(M, N) \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \right) - \frac{\partial}{\partial z_N} \left( -F(M, N) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} \right) \right] + \left[ - \frac{\partial}{\partial x_N} \left( F(M, N) \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \right) \right] \cos \beta + \cos \gamma \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{\partial}{\partial x_N} \left( F(M, N) \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} \right) \right] \right\} d\sigma. \quad (36)$$

К последнему интегралу применяем формулу Стокса (32) и применяя вышеописанные рассуждения для интеграла по контуру на замкнутой поверхности, получаем, что этот интеграл равен нулю, тогда

$$\Phi_x(M) = \kappa^2 \int p_Q(N) F(M, N) \cos \alpha d\sigma - \int \left\{ \left[ - \left( \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial y_N^2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial z_N^2} \right) F(M, N) \right] \cos \alpha + \cos \beta \left[ F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial x_N \partial y_N} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial F(M, N)}{\partial x_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \right] + \cos \gamma \left[ F(M, N) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial x_N \partial z_N} + \frac{\partial F(M, N)}{\partial x_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \right] \right\} d\sigma. \quad (37)$$

Применим формулу (37) для функции  $p_Q(M)$ , рассчитываемой по формуле (17) или (19).



Рассмотрим вначале случай, когда  $p_Q(M)$  рассчитывается по формуле (17). Для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда  $m = 1$ . В этом случае  $p_Q(M)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца (2), тогда

$$-\left(\frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial y_N^2} + \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial z_N^2}\right) = \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial x_N^2} + \kappa^2 p_Q(N).$$

В результате подстановки формула (37) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_x(M) = \int \left\{ F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial x_N^2} \cos \alpha + \left[ F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial x_N \partial y_N} + \frac{\partial F(M, N)}{\partial x_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \right] \cos \beta + \right. \\ \left. + \cos \gamma \left[ F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial x_N \partial z_N} + \frac{\partial F(M, N)}{\partial x_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \right] \right\} d\sigma. \end{aligned} \quad (38)$$

В ходе аналогичных рассуждений получаем

$$\begin{aligned} \Phi_y(M) = \int \left\{ F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial y_N^2} \cos \beta + \left[ F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial x_N \partial y_N} + \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial x_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \right] \cos \alpha + \right. \\ \left. + \cos \gamma \left[ F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial y_N \partial z_N} + \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \right] \right\} d\sigma. \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \Phi_z(M) = \int \left\{ F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial z_N^2} \cos \gamma + \left[ F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial x_N \partial z_N} + \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial x_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} \right] \cos \alpha + \right. \\ \left. + \cos \beta \left[ F(M, N) \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial y_N \partial z_N} + \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \right] \right\} d\sigma. \end{aligned} \quad (40)$$

Подставим (38)–(40) в (21), тогда в  $I(M)$  будет интеграл

$$\int_{\sigma} \left\{ \cos \alpha_M \cos \beta \left[ \frac{\partial F(M, N)}{\partial x_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \right] + \right. \\ + \cos \alpha_M \cos \gamma \left[ \frac{\partial F(M, N)}{\partial x_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \right] + \\ + \cos \alpha \cos \beta_M \left[ \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial x_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \right] + \\ + \cos \beta_M \cos \gamma \left[ \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \right] + \\ + \cos \alpha \cos \gamma_M \left[ \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial x_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} \right] + \\ \left. + \cos \beta \cos \gamma_M \left[ \frac{\partial F(M, N)}{\partial z_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial y_N} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial z_N} \right] \right\} d\sigma,$$

который в силу выполнения соотношений  $\nabla_N F(M, N) = -\nabla_M F(M, N)$ ,  $\nabla_N F(M, N) = -\nabla_{M_i} p_Q(N)$  обращается в ноль, и тогда интеграл (20) равен

$$I(M) = \int_{\sigma} F(M, N) \frac{\partial}{\partial n_N} \left( \vec{n}_M \cdot \nabla_{M_i} p_Q(N) \right) d\sigma \quad (41)$$

или для  $m$  источников

$$I(M) = \sum_{i=1}^m \int_{\sigma} F(M, N) \frac{\partial}{\partial n_N} \left( \vec{n}_M \cdot \nabla_{M_i} p_Q(N) \right) d\sigma. \quad (42)$$

Теперь пусть  $p_Q(M)$  рассчитывается по формуле (19). В этом случае  $p_Q(M)$  удовлетворяет уравнению Лапласа, тогда

$$-\left( \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial y_N^2} + \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial z_N^2} \right) = \frac{\partial^2 p_Q(N)}{\partial x_N^2}.$$

В ходе рассуждений аналогичных вышеприведенным получаем формулу

$$I(M) = \kappa^2 \int_{\sigma} p_Q(N) F(M, N) \vec{n}_M \cdot \vec{n}_M d\sigma + \\ + \sum_{i=1}^m \int_{\sigma} F(M, N) \frac{\partial}{\partial n_N} \left( \vec{n}_M \cdot \nabla_{M_i} p_Q(N) \right) d\sigma. \quad (43)$$

Так как точки  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  не лежат на поверхности  $\sigma$ , то интегралы (42) и (43) не являются гиперсингулярными. Эти интегралы имеют устранимую особенность при  $M \rightarrow N$ , которая исчезает при переходе к системе отсчета на поверхности  $\sigma$  аналогичной полярной с полюсом в точке  $M$ .

Для численного расчета интеграла  $I(M)$  применяется квадратурная формула (11). При этом для каждой ячейки постоянной считается функция  $\exp(ikr_{MN})$ , а интеграл для оставшегося множителя вычисляется аналитически. При вычислении интеграла (17) или (19) также применяются мозаично-скелетные аппроксимации.

### Список литературы

- [1] Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М. Янус-К, 2001, 508с.
- [2] Горейнов С. А. Мозаично-скелетные аппроксимации матриц, порожденных асимптотически гладкими и осцилляционными ядрами. // *Сб.: Матричные методы и вычисления*. 1999. С. 42-76.
- [3] Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. МГУ. 1987г. 167с.
- [4] Довгий С. А., Лифанов И. К. Методы решения интегральных уравнений. Киев, Наукова думка, 2002, 344с.
- [5] Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М. ТОО Янус. 1995, 520с.
- [6] Лифанов И.К., Ставцев С.Л. Интегральные уравнения и распространение звука в мелком море. // *Дифференциальные уравнения*. 2004. Т. 40, №9. С. 1256-1270.
- [7] Ставцев С.Л. Итерационный подход к численному решению системы интегральных уравнений для краевых задач скалярного уравнения Гельмгольца. // *Дифференциальные уравнения*. 2006. Том 42, №9. С. 1282-1290.

- [8] Tyrtysnikov E. E. Mosaic-skeleton approximations // *Calcolo*. 1996. V. 33(1-2). P. 47-57.
- [9] Tyrtysnikov E.E. Incomplete cross approximation in the mosaic-skeleton method // *Computing*. 2000. V. 64(4). P. 367-380.